

Analisi degli errori

Elena Franchini



www.formath.it – info@formath.it

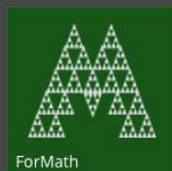
RSDDM - Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica e
Divulgazione della Matematica

Il database delle Prove INVALSI www.gestinv.it

Gestinv 2.0 Archivio interattivo delle prove Invalsi

realizzato da Cervelli in Azione srl e ForMath srl, sviluppando un progetto realizzato per l'Invalsi da Sergio Zoccante

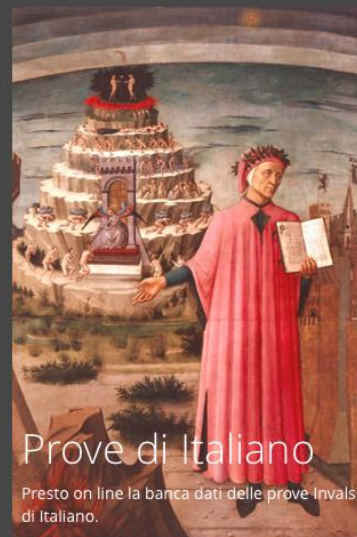
Informazioni



Matematica



Italiano



Utilità



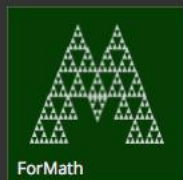
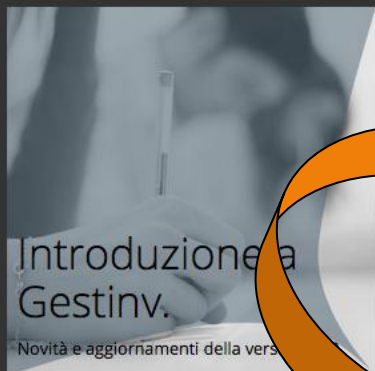
<http://www.gestinv.it/>

Sezione matematica

Gestinv 2.0 Archivio interattivo delle prove Invalsi

realizzato da Cervelli in Azione srl e ForMath srl, sviluppando un progetto realizzato per l'Invalsi da Sergio Zoccante

Informazioni



Matematica



Italiano



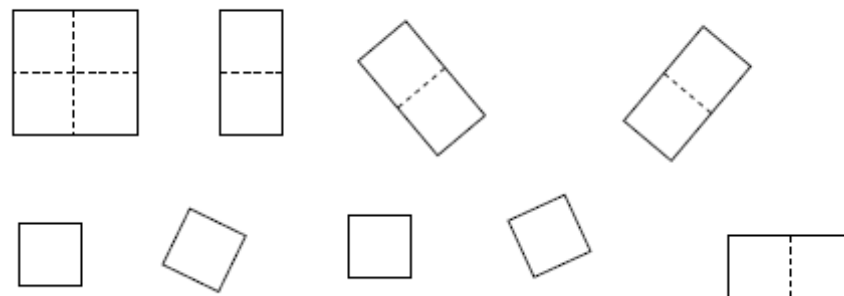
Utilità



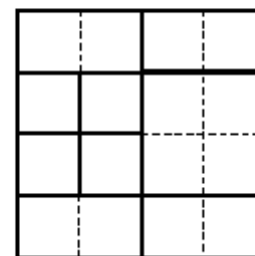
Livello 2 2016

Ambiti e argomenti	Domanda	corretta	errata	Mancate risposte
SPAZIO E FIGURE	D4	40,9	59,1	0,0

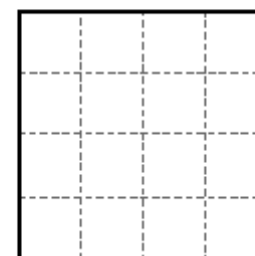
D4. Questi sono i pezzi per comporre un quadrato.



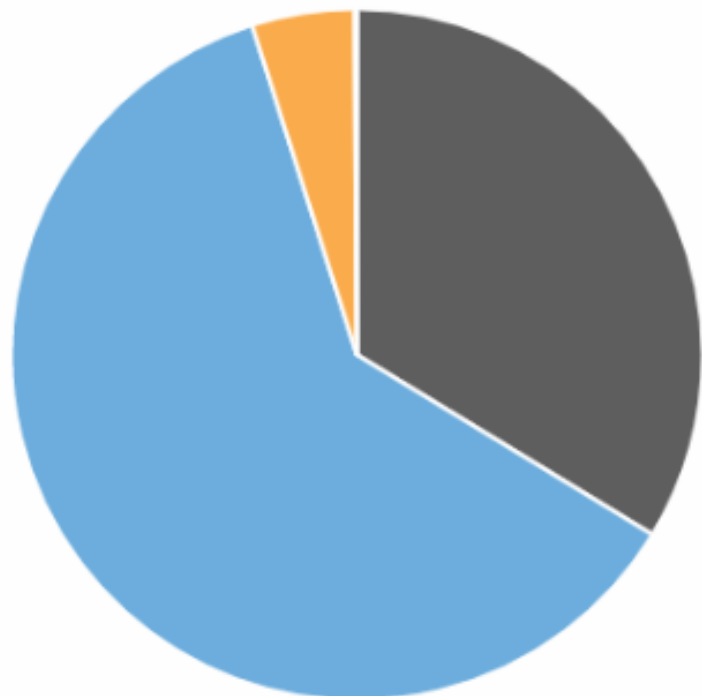
Aldo ha composto il quadrato in questo modo:



Componi il quadrato in modo diverso, utilizzando gli stessi pezzi.

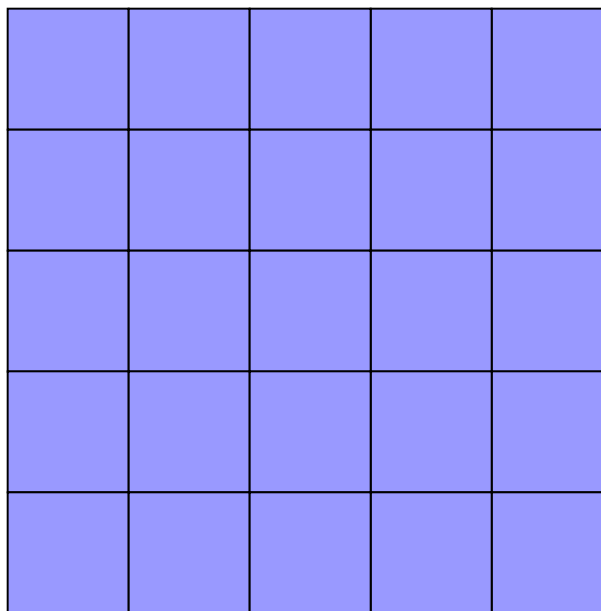
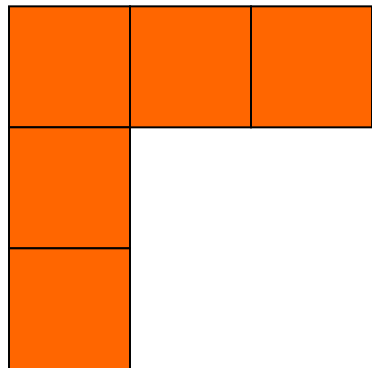


Percentuali nazionali



- Risposte corrette 33.7%
- Risposte errate 61.4%
- Risposte Mancate 4.8%
- Altre non valide. 0.1%

Un gioco



Elena vuole sfidare Fabrizio e gli dice:

Vince chi tra noi due riuscirà a sistemare nel quadrato il maggior numero di pezzi “a elle” senza metterli uno sull’altro e senza uscire fuori

Voi, quanti pezzi riuscite a sistemare nel quadrato?

Disegnate con precisione la vostra soluzione (indicando chiaramente i pezzi)

Analisi del gioco

■ I saperi in gioco

☐ Logica

- Esclusione di casi

☐ Aritmetica

- Conteggio

☐ Geometria

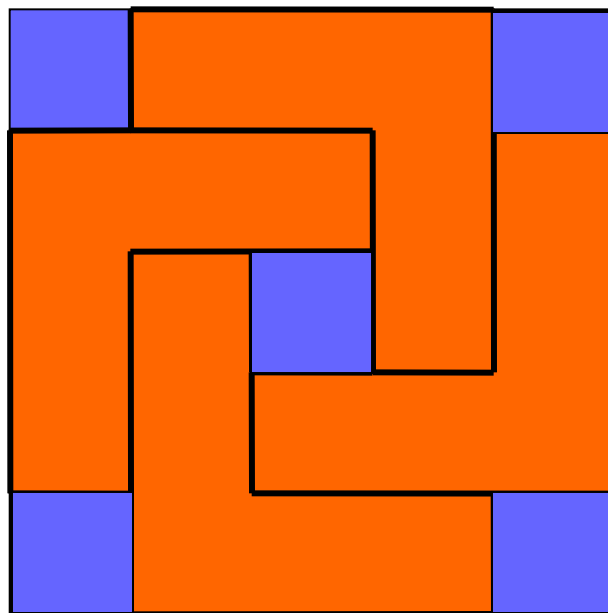
- Visualizzazione
- Ricoprimento
- Trasformazioni (rotazioni, traslazioni)

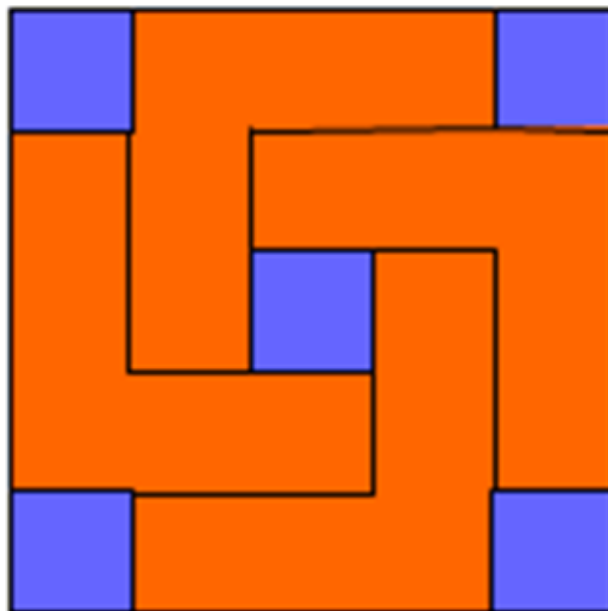
■ Diverse strategie risolutive

- Determinazione del massimo teorico possibile
- Analisi delle prime soluzioni “naturali”
- Collegamento tra area ricoperta e numero di pezzi utilizzati

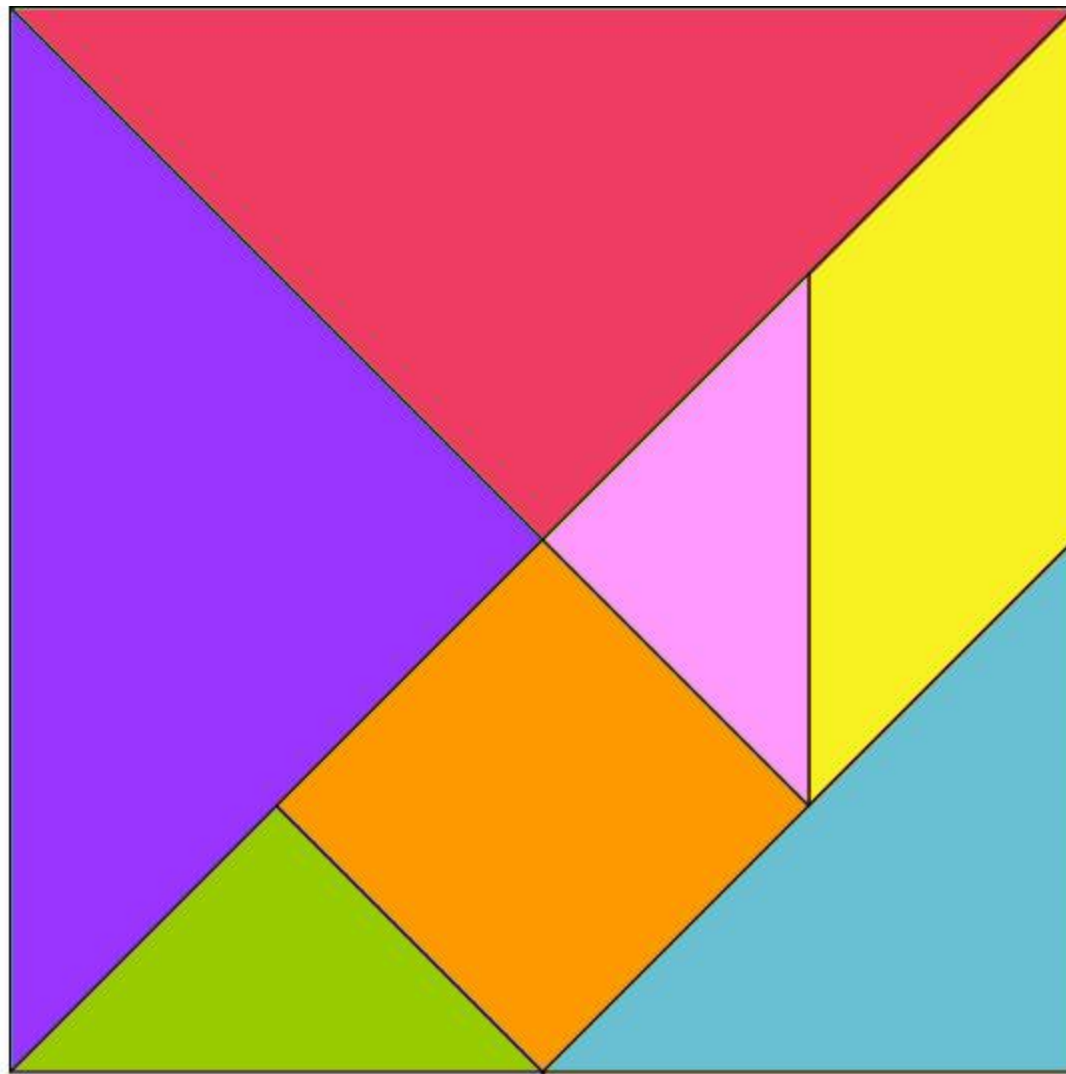
■ Analisi delle soluzioni

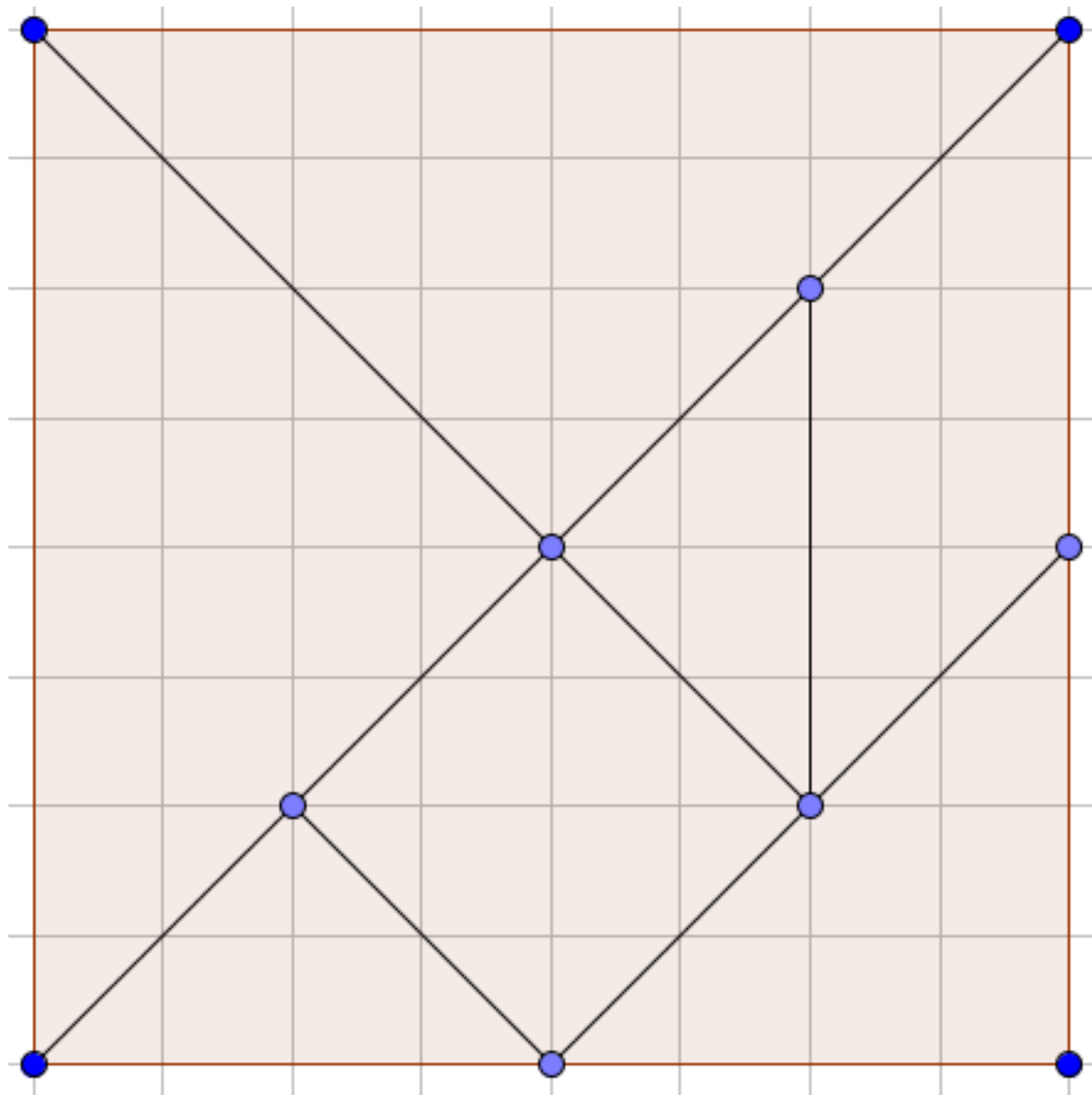
- Soluzione ottimale: 4 pezzi, con disegno preciso e chiaro
- 4 pezzi, con disegno poco preciso
- 3 pezzi, con disegno preciso e chiaro
- 4 pezzi senza disegno; 5 pezzi senza disegno (ovviamente!) e l'operazione $25:5=5$
- Incomprensione del problema (pezzi sovrapposti, sporgenti...)



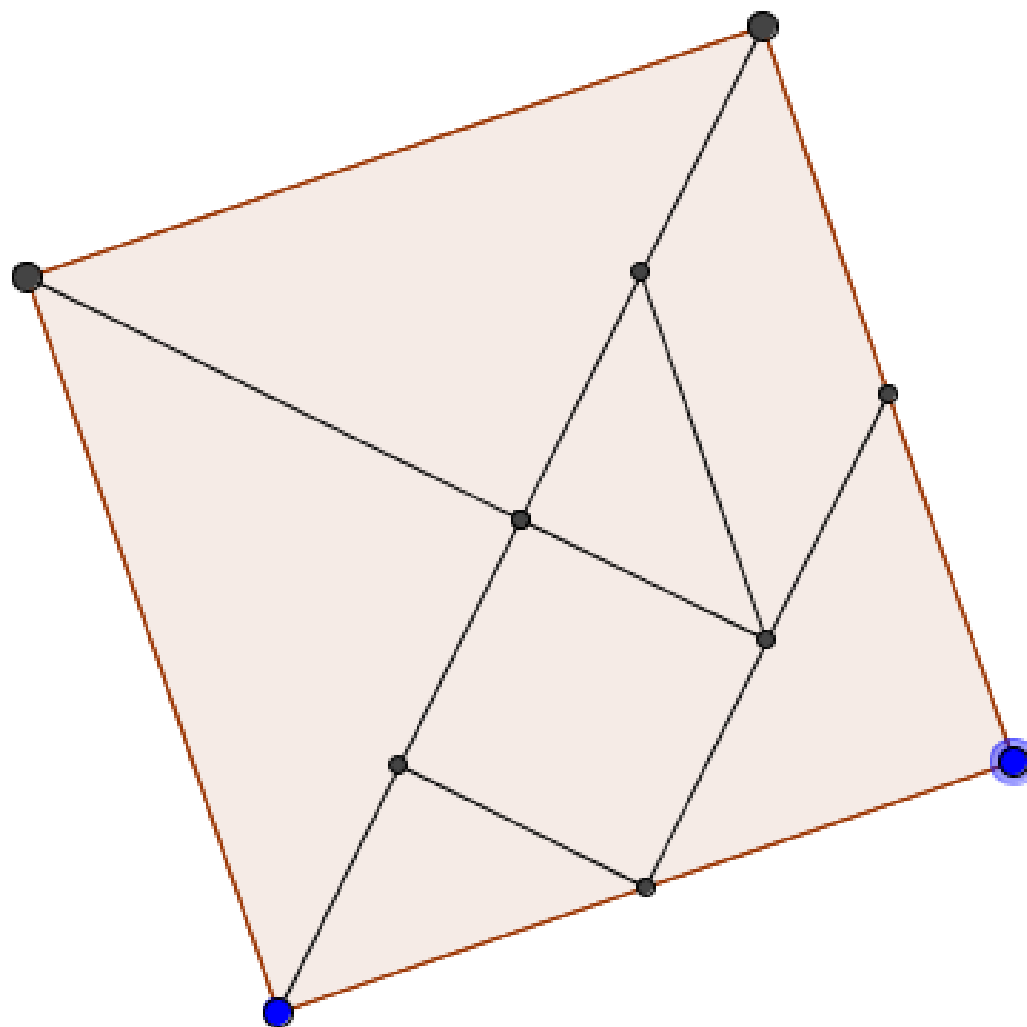


Tangram, costruzioni e ricoprimenti

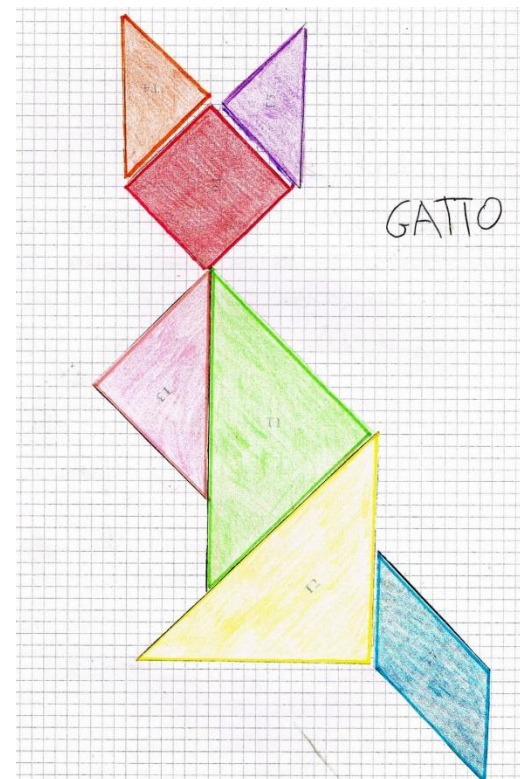
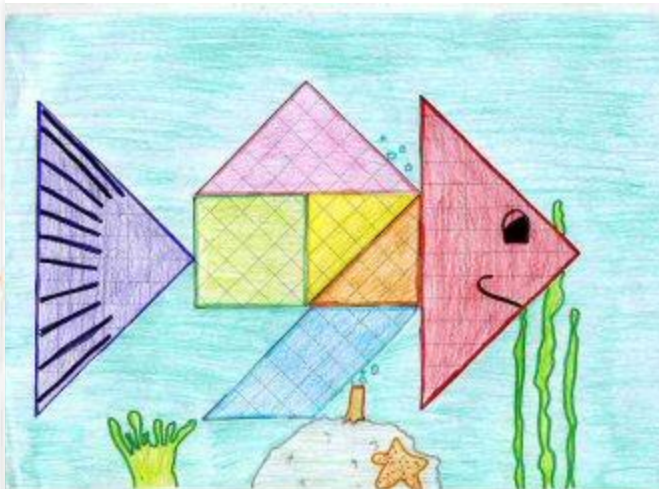




Geogebra



Tangram, costruzioni e ricoprimenti



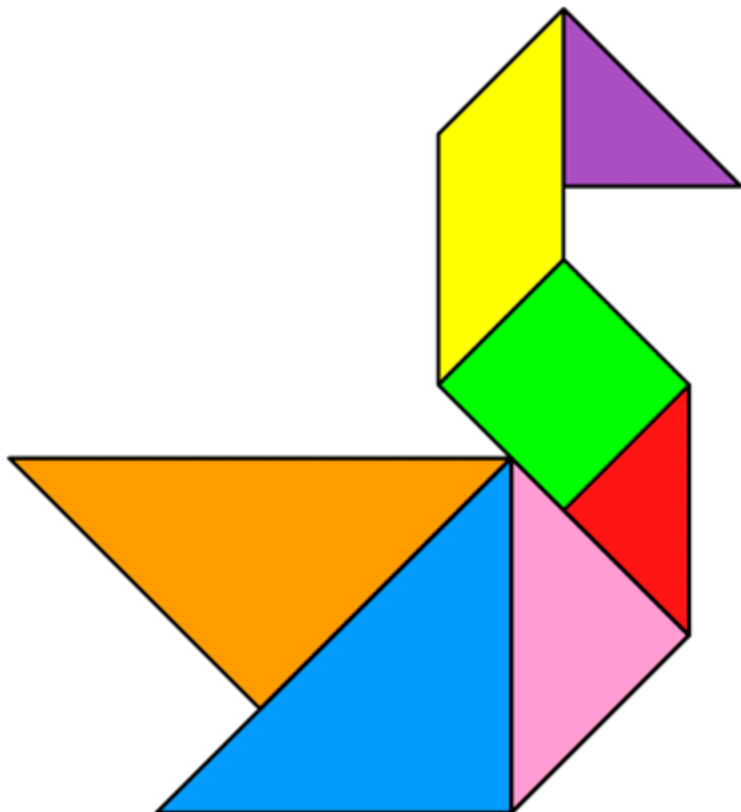
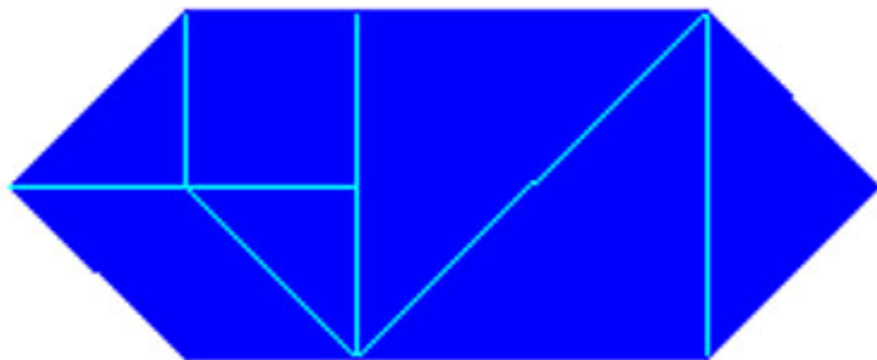
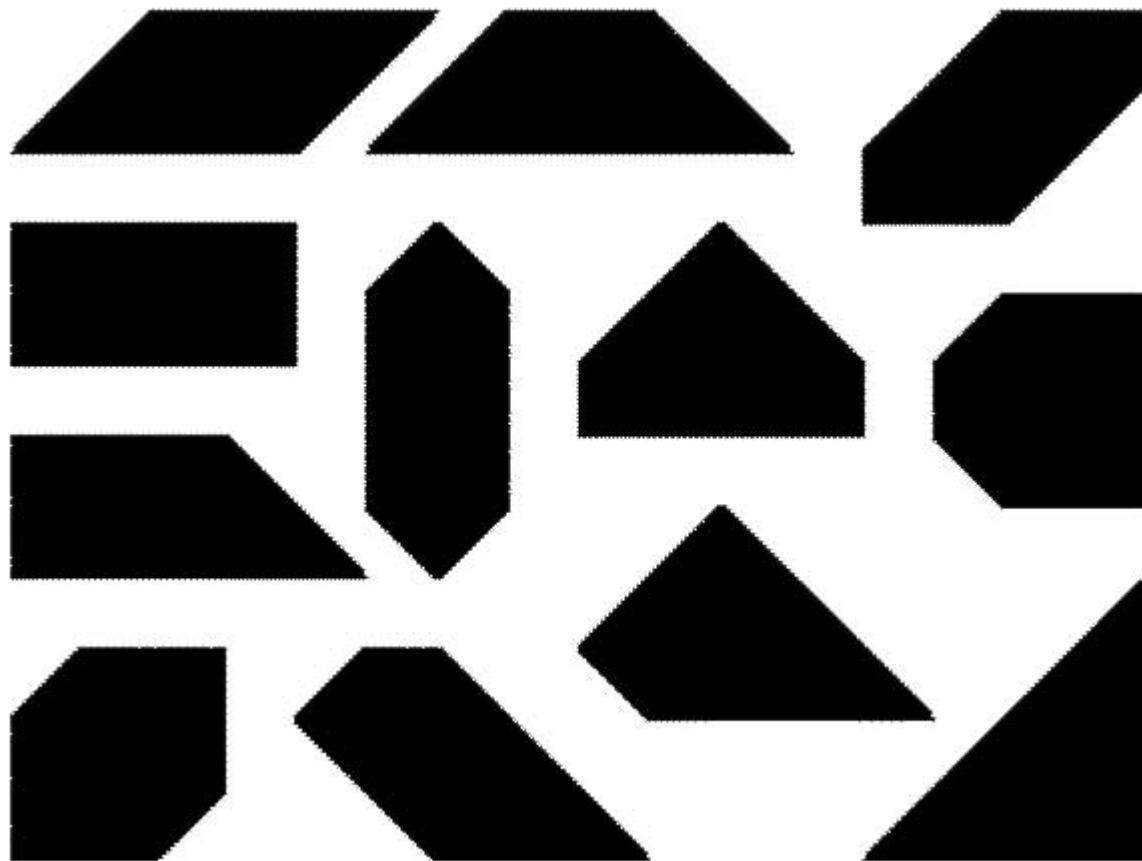
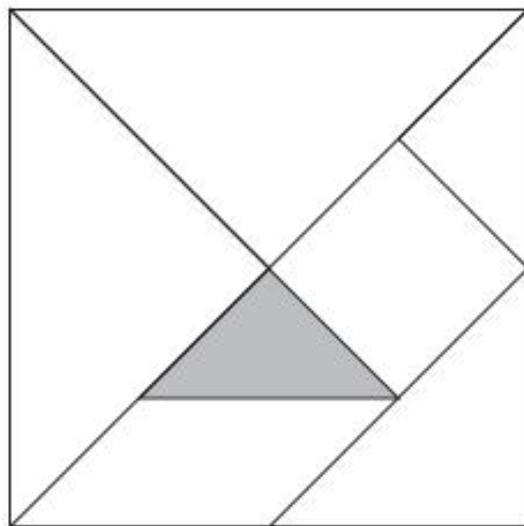


Figure congruenti
oppure
Proporzioni diverse





In figura è rappresentato il gioco del Tangram con i pezzi che lo compongono.



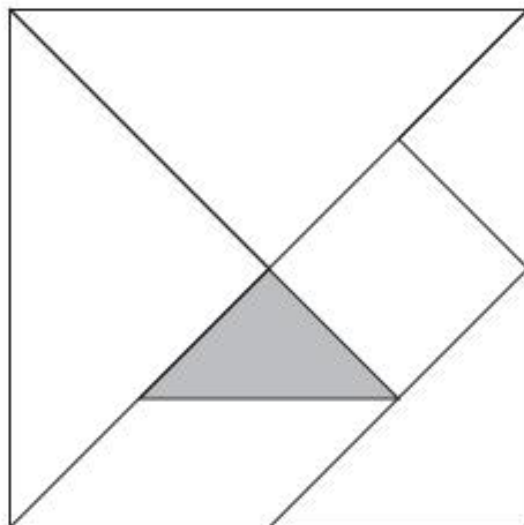
**Livello 8 D25
(2013)**

A quale frazione dell'area del Tangram corrisponde il pezzo colorato in grigio?

- A. ☐ Un settimo
- B. ☐ Un ottavo
- C. ☐ Un quindicesimo
- D. ☐ Un sedicesimo

	Caratteristiche	Descrizione e commento																
	AMBITO PREVALENTE Numeri	BLOCCO A																
	SCOPO DELLA DOMANDA Saper scomporre una figura in parti equivalenti ed esprimere la parte individuata come rapporto.	Risposta corretta: D																
	PROCESSO PREVALENTE Riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze	Per rispondere al quesito è necessario scomporre la figura in triangoli equivalenti a quello colorato in grigio, anche solo per metà del Tangram, e vedere che l'intera figura può essere scomposta in 16 (8x2) triangoli equivalenti.																
	Indicazioni nazionali <i>Utilizzare il concetto di rapporto tra numeri o misure ed esprimerlo sia nella forma decimale, sia mediante frazione.</i>	L'opzione A corrisponde al conteggio di tutti i pezzi del Tangram senza tener conto dell'equivalenza fra le parti, mentre l'opzione C corrisponde al conteggio di tutti i triangoli equivalenti a quello grigio, che però non viene considerato nel conteggio. L'errore quindi non è sul concetto di equivalenza fra le parti come nel caso precedente, ma nel significato di rapporto fra la parte e il tutto. L'opzione B corrisponde a chi considera solo metà del Tangram.																
	RISULTATI DEL CAMPIONE																	
	<table><tr><th rowspan="2">Item</th><th rowspan="2">Manc Risp</th><th colspan="4">Opzioni</th></tr><tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th></tr><tr><td>D25</td><td>3,4</td><td>35,3</td><td>8,0</td><td>11,3</td><td>42,0</td></tr></table>	Item	Manc Risp	Opzioni				A	B	C	D	D25	3,4	35,3	8,0	11,3	42,0	
Item	Manc Risp			Opzioni														
		A	B	C	D													
D25	3,4	35,3	8,0	11,3	42,0													
	Macro processo: Utilizzare																	

In figura è rappresentato il gioco del Tangram con i pezzi che lo compongono.



Scomposizione di figure piane.
Individuazione di rapporti tra
aree di figure piane.

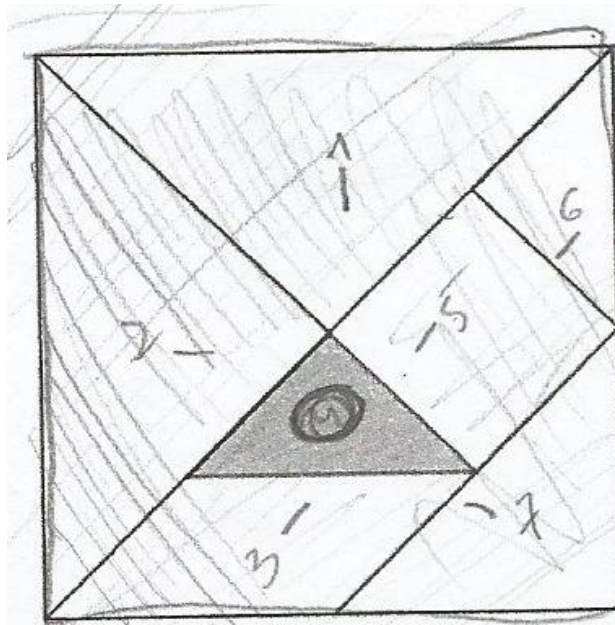
A quale frazione dell'area del Tangram corrisponde il pezzo colorato in grigio?

- A. ☐ Un settimo **35,3%**
- B. ☐ Un ottavo **8%**
- C. ☐ Un quindicesimo **11,3%**
- D. ☐ Un sedicesimo **42%**

Livello 8 D25 (2013)

Mancata risposta: 3,4%

In figura è rappresentato il gioco del Tangram con i pezzi che lo compongono.



- Possibili strategie risolutive
- Come ci aspettiamo che rispondano gli studenti? Quali possibili errori e difficoltà?

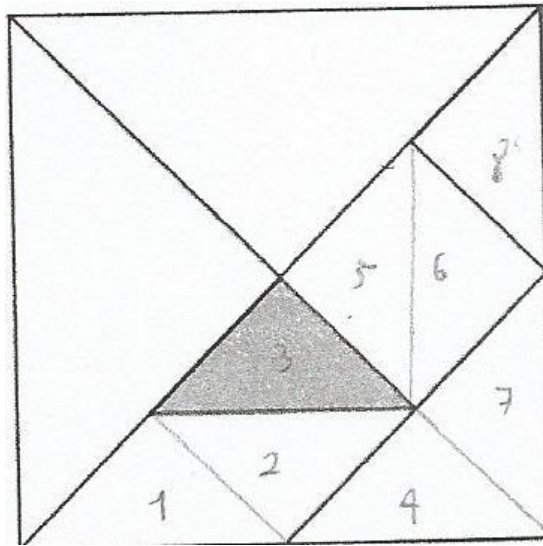
A quale frazione dell'area del Tangram corrisponde il pezzo colorato in grigio?

- A. ☐ Un settimo
- B. ☐ Un ottavo
- C. ☐ Un quindicesimo
- D. ☐ Un sedicesimo

Uno su sette pezzi...

“A longitudinal analysis of the Italian national standardized mathematics tests” Laura Branchetti, Federica Ferretti, Alice Lemmo, Andrea Maffia, Francesca Martignone, Mariagiulia Matteucci, Stefania Mignani

In figura è rappresentato il gioco del Tangram con i pezzi che lo compongono.



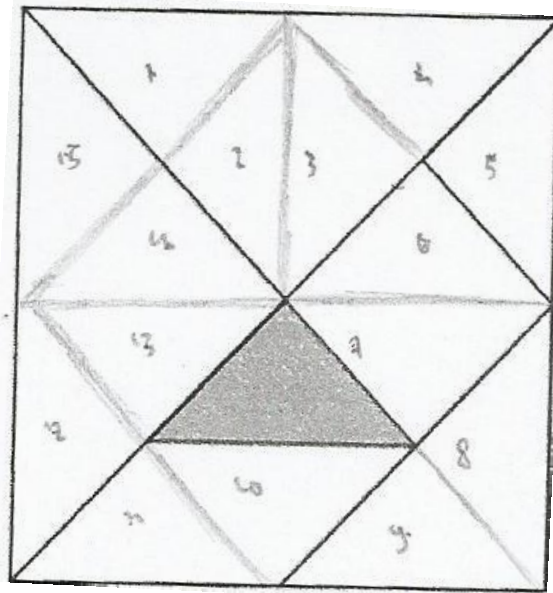
- Possibili strategie risolutive
- Come ci aspettiamo che rispondano gli studenti? Quali possibili errori e difficoltà?

A quale frazione dell'area del Tangram corrisponde il pezzo colorato in grigio?

- A. ☐ Un settimo
- B. ☐ Un ottavo
- C. ☐ Un quindicesimo
- D. ☐ Un sedicesimo

Si considera solo metà del tangram

In figura è rappresentato il gioco del Tangram con i pezzi che lo compongono.



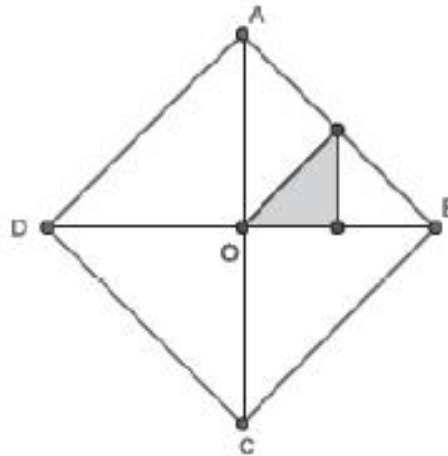
- Possibili strategie risolutive
- Come ci aspettiamo che rispondano gli studenti? Quali possibili errori e difficoltà?

A quale frazione dell'area del Tangram corrisponde il pezzo colorato in grigio?

- A. ☐ Un settimo
- B. ☐ Un ottavo
- C. ☐ Un quindicesimo
- D. ☐ Un sedicesimo

Non si considera il pezzo grigio...

Nel quadrato $ABCD$ sono stati uniti i punti medi del lato AB e del segmento OB .



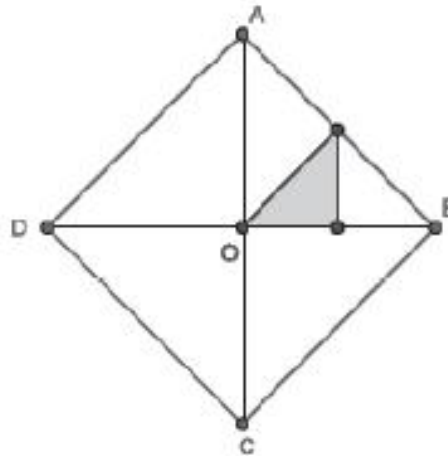
Scomposizione di figure piane.
Individuazione di rapporti tra
aree di figure piane.

- Possibili strategie risolutive
- Come ci aspettiamo che rispondano gli studenti? Quali possibili errori e difficoltà?

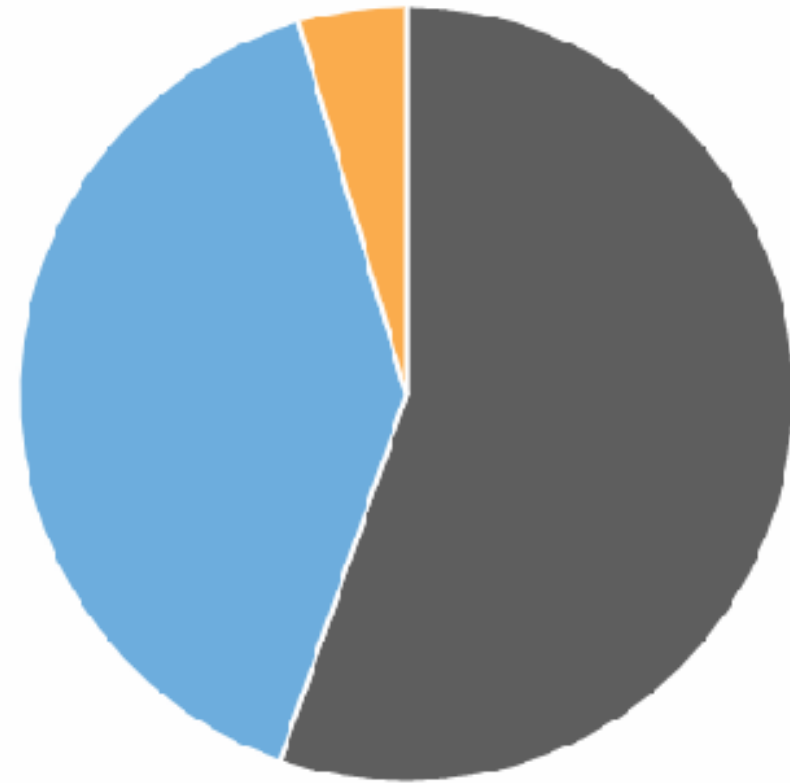
Con quanti triangoli come quello colorato in grigio si riesce a ricoprire esattamente la superficie del quadrato $ABCD$?

Risposta:

Nel quadrato ABCD sono stati uniti i punti segmento OB.



Percentuali nazionali

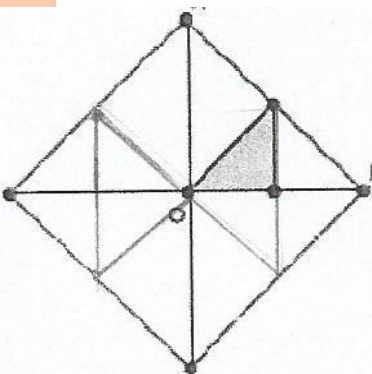
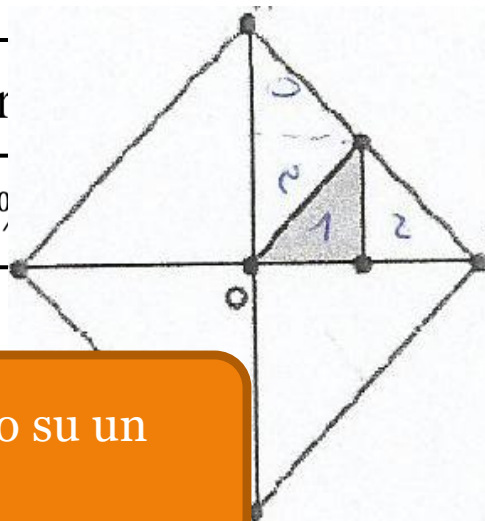


■ Risposte corrette 55.3%
■ Risposte errate 40.2%
■ Risposte Mancate 4.5%

Con quanti triangoli come quello colorato in grigio si riesce a ricoprire esattamente la superficie del quadrato ABCD?

Risposta:

Risposta	16	12	8	4	3	Altr
Percentuale	52.7%	10.8%	5.4%	6.8%	4.1%	6.8%



Ragionamento solo su un
quarto

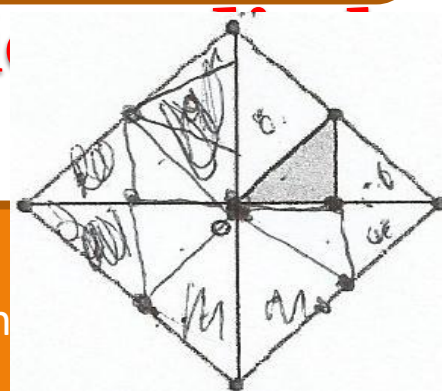
Solo parti bianche per 4

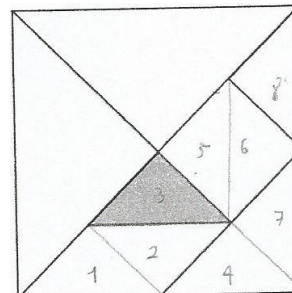
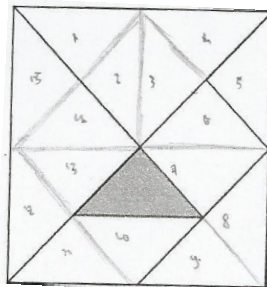
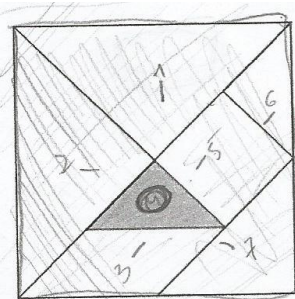
azi

ine

"Tre triangoli in un quarto per

"Tre triangoli in





Risposta	16	12	8	4	3	Altro	Mancanti
Percentuale	52.7%	10.8%	5.4%	6.8%	4.1%	6.8%	13.4%

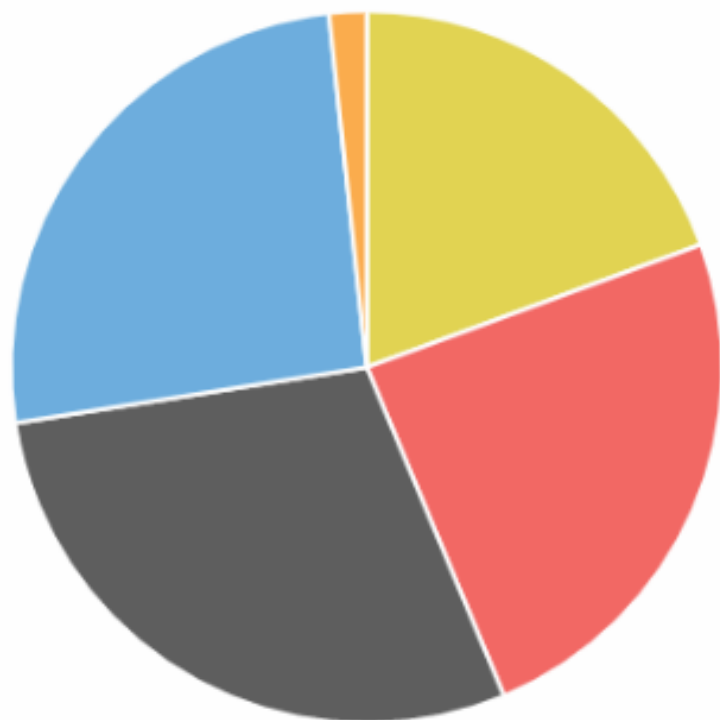
Come possiamo collegare queste risposte a quelle del quesito precedente?

- A. ☐ Un settimo
- B. ☐ Un ottavo
- C. ☐ Un quindicesimo
- D. ☐ Un sedicesimo

Ambiti e argomenti	Domanda	a	b	c	d	Mancate risposte
SPAZIO E FIGURE	D21	36,4	36,4	13,6	13,6	0,0

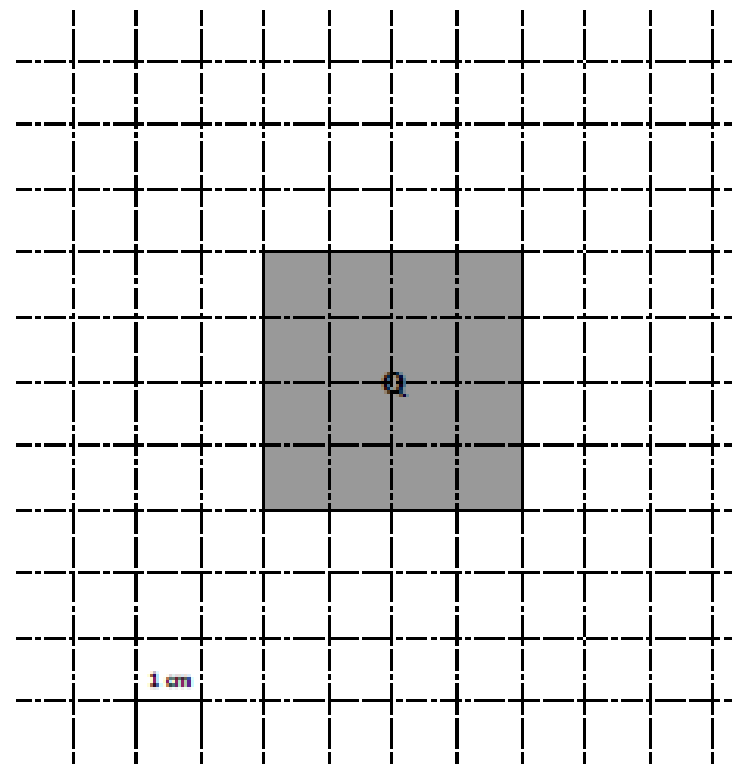
Livello 5
2016

Domande a risposta multipla



■ Risposta A 19.4%
 ■ Risposta B 24.3%
■ Risposta C 28.8%
 ■ Risposta D 25.8%
■ Mancate e non valide 1.7%

D21. Osserva il quadrato Q.



Immagina di aumentare la lunghezza di ciascun lato di 2 centimetri. Qual è la differenza tra l'area del nuovo quadrato e l'area di Q?

- A. ☐ 8 cm^2
- B. ☐ 16 cm^2
- C. ☐ 20 cm^2
- D. ☐ 36 cm^2

Geopiano virtuale

- <http://www.mathlearningcenter.org/web-apps/geoboard/>

Costruisci un quadrato Q sul geopiano virtuale.

Ora costruisci un quadrato Q1 con il lato doppio rispetto a quello di Q. Come cambia l'area? Come cambia il perimetro?

Costruisci un triangolo T sul geopiano virtuale.

Ora costruisci un triangolo T1 con i lati doppi rispetto a quelli di T. Come cambia l'area? Come cambia il perimetro?

Cosa osservi?

Figure geometriche

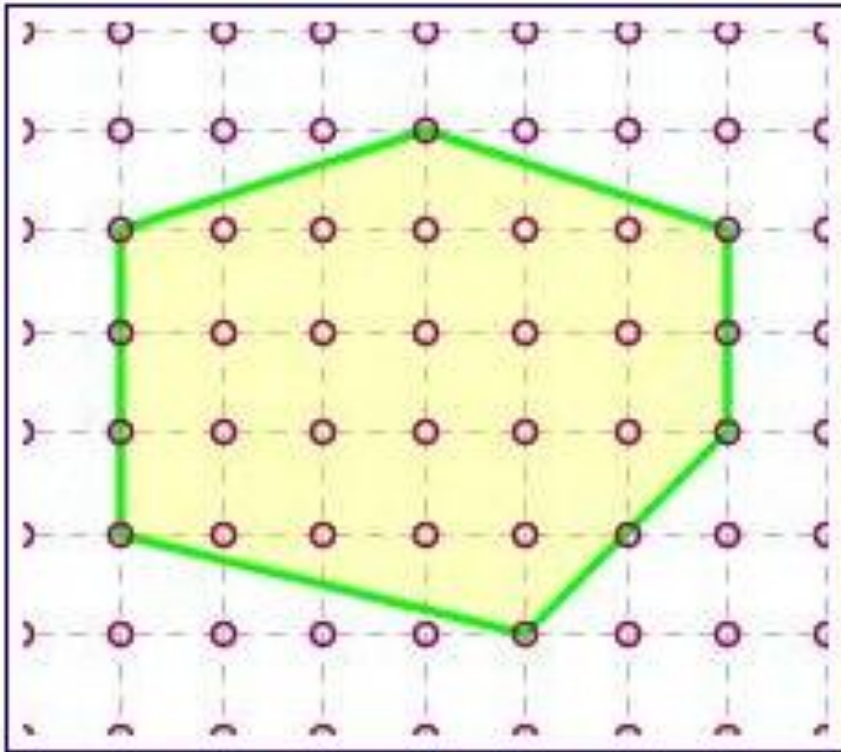
Figure isoperimetriche

Figure equiestese

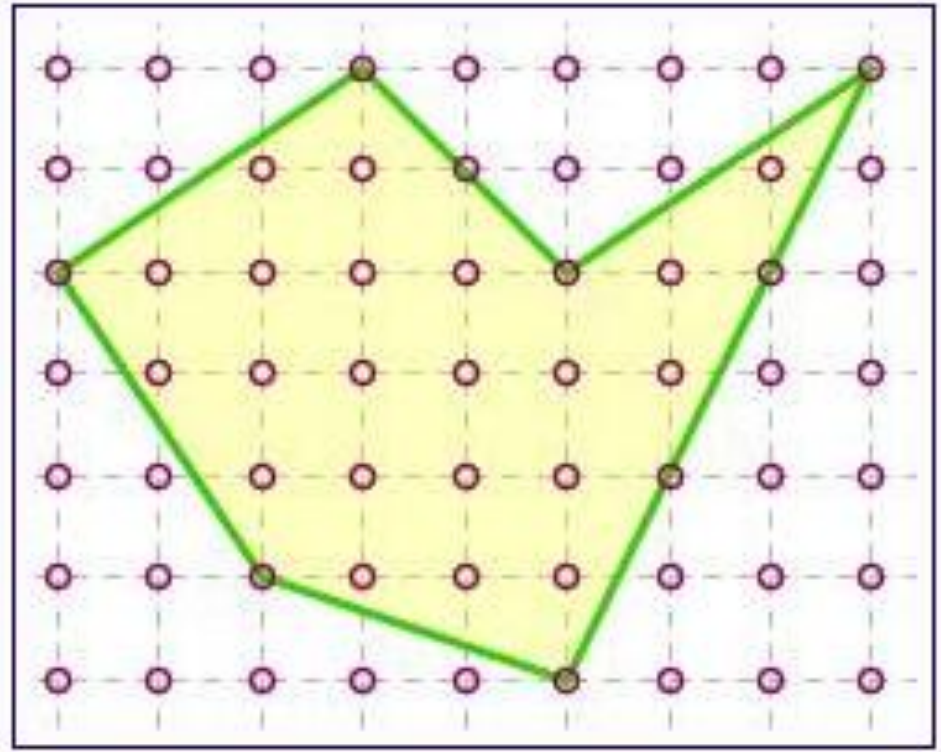
Figure simmetriche rispetto ad un asse

Figure simmetriche rispetto ad un punto

Teorema di Pick



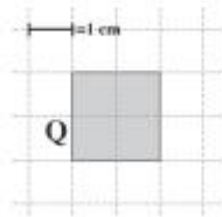
$$P_i = 19 \quad P_c = 10$$



$$P_i = 21 \quad P_c = 9$$

$$A = P_i + P_c/2 - 1$$

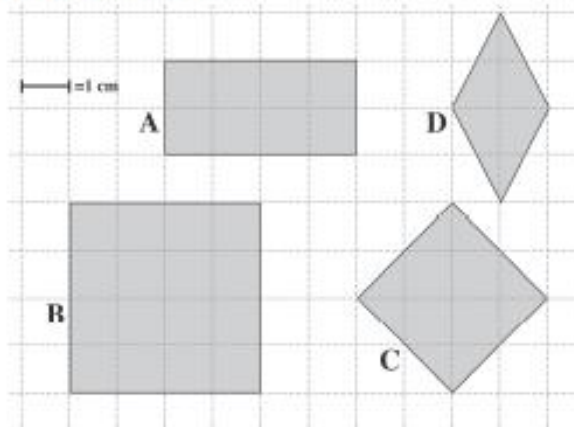
D25. Osserva il quadrato Q.



25 - A		81.0%	16.6%	2.4%	Mostra
25 - B		57.6%	39.6%	2.8%	Mostra
25 - C		50.5%	46.4%	3.1%	Mostra
25 - D		76.4%	20.3%	3.3%	Mostra

errata

Osserva ora le seguenti figure.



Individua quali figure hanno area doppia di Q, mettendo una crocetta nella colonna del Sì o del No per ogni riga della seguente tabella.

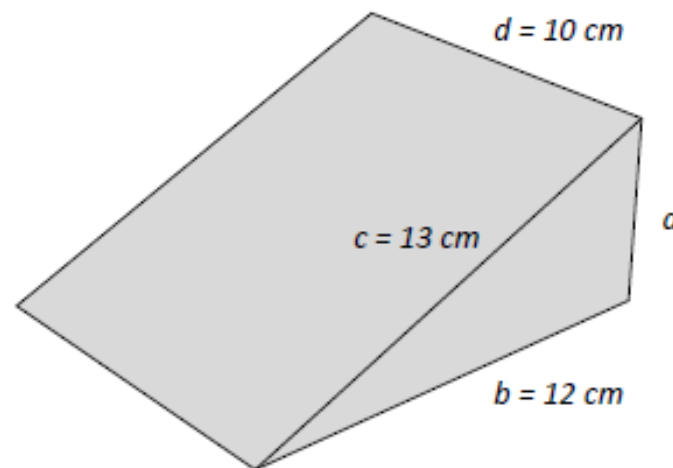
		Sì	No
1.	Figura A	☒	☐
2.	Figura B	☐	☒
3.	Figura C	☒	☐
4.	Figura D	☐	☒

Scomposizione di figure piane.
Individuazione di rapporti tra
aree di figure piane.

Livello 8 2016

Ambiti e argomenti	Domanda	a	b	c	d	Mancate risposte
SPAZIO E FIGURE	D3_a	34,8	21,7	34,8	4,3	4,3

D3. Per tenere aperte le porte a volte si usano dei cunei di legno come quello in figura. Lo spigolo a è perpendicolare allo spigolo b e allo spigolo d .



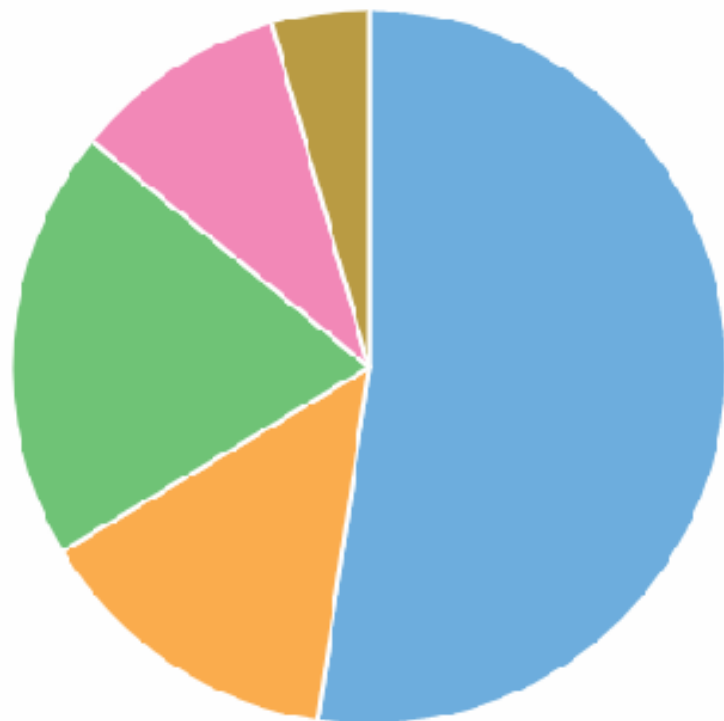
a. Due cunei come quello in figura vengono incollati in modo da formare un parallelepipedo rettangolo. Quali sono le dimensioni del parallelepipedo così ottenuto?

- A. ☐ 12 cm; 10 cm; 5 cm
- B. ☐ 13 cm; 12 cm; 5 cm
- C. ☐ 26 cm; 24 cm; 10 cm
- D. ☐ 24 cm; 20 cm; 10 cm

b. Qual è l'area della superficie inclinata del cuneo?

Risposta: cm²

Domande a risposta multipla

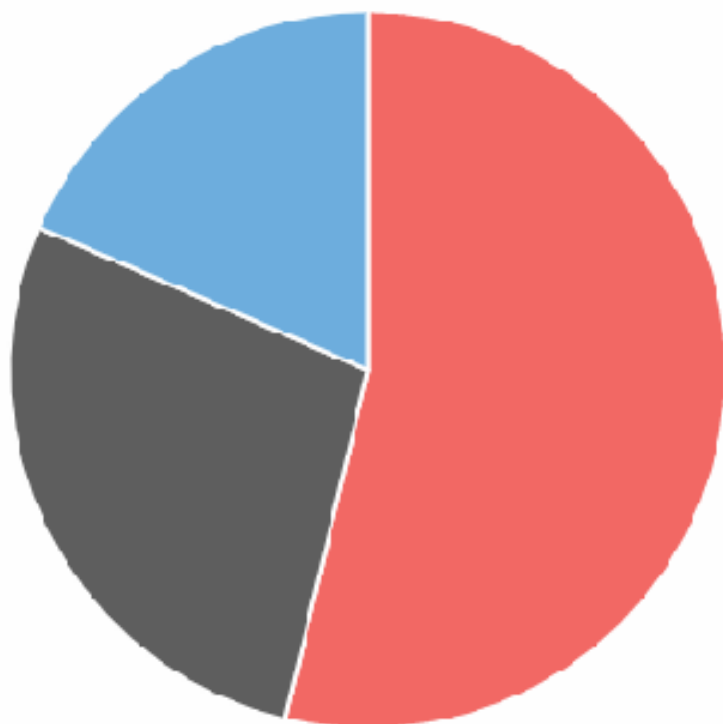


■ Risposta A 52.3%
 ■ Risposta B 14.1%
 ■ Risposta C 19.5%
 ■ Risposta D 9.7%
 ■ Mancate e non valide 4.4%

Ambiti e argomenti	Domanda	corretta	errata	Mancate risposte
SPAZIO E FIGURE	D3_b	43,5	39,1	17,4

Livello 8 2016

Percentuali nazionali

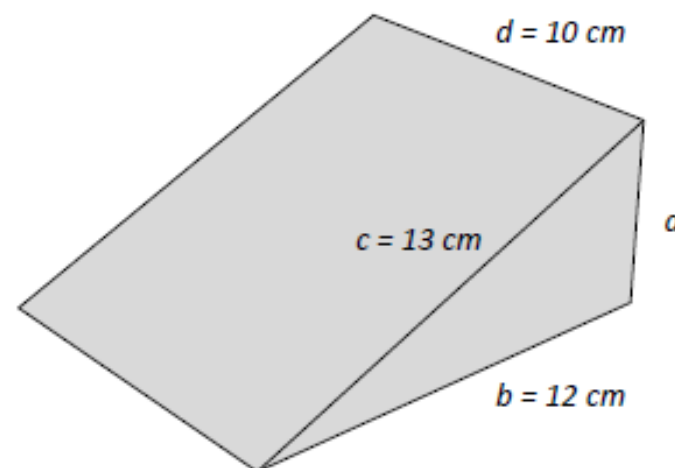


■ Risposte corrette 53.7%

■ Risposte errate 27.8%

■ Risposte Mancate 18.5%

- D3. Per tenere aperte le porte a volte si usano dei cunei di legno come quello in figura. Lo spigolo a è perpendicolare allo spigolo b e allo spigolo d .



- a. Due cunei come quello in figura vengono incollati in modo da formare un parallelepipedo rettangolo. Quali sono le dimensioni del parallelepipedo così ottenuto?

- A. ☐ 12 cm; 10 cm; 5 cm
 B. ☐ 13 cm; 12 cm; 5 cm
 C. ☐ 26 cm; 24 cm; 10 cm
 D. ☐ 24 cm; 20 cm; 10 cm

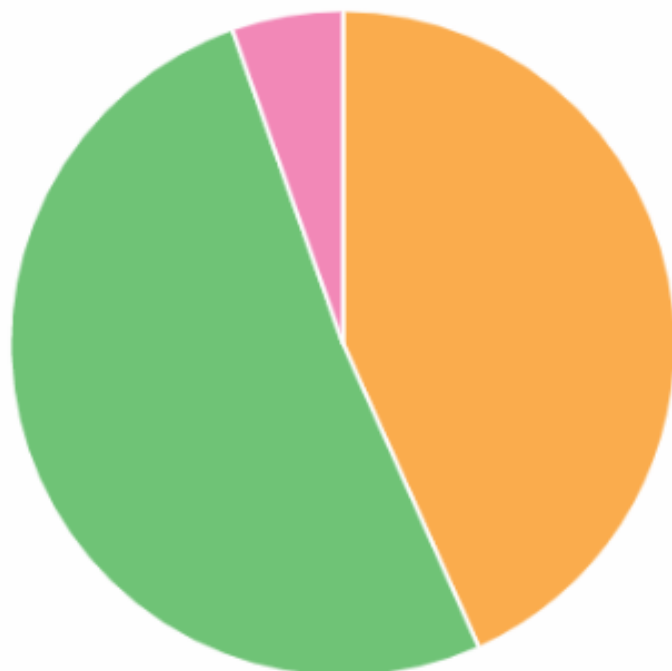
- b. Qual è l'area della superficie inclinata del cuneo?

Risposta: cm²

Ambiti e argomenti	Domanda	corretta	errata	Mancate risposte
SPAZIO E FIGURE	D19	47,8	52,2	0,0

Livello 8 2016

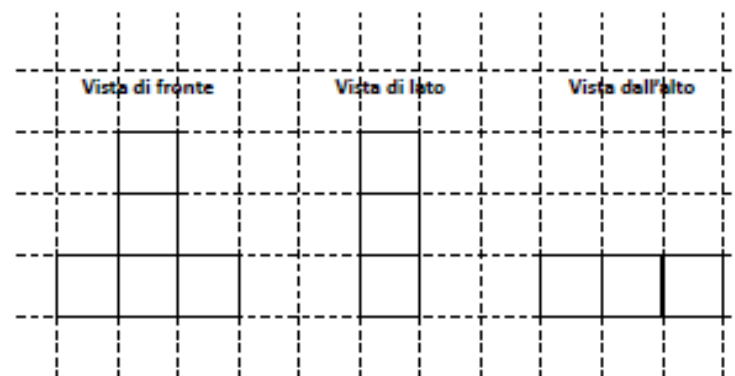
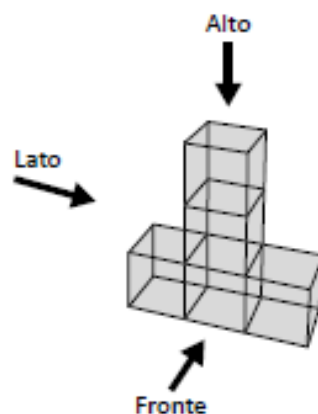
Percentuali nazionali



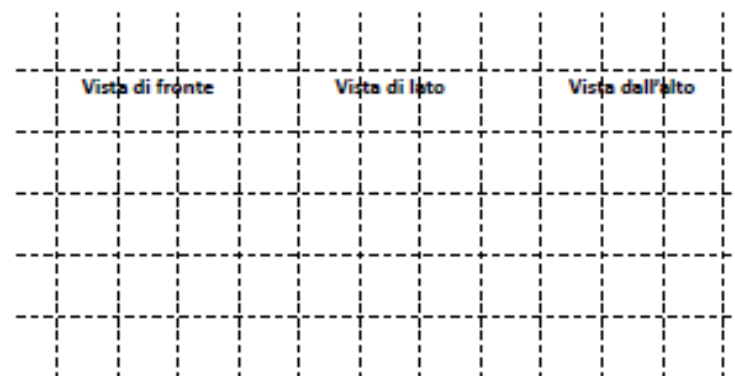
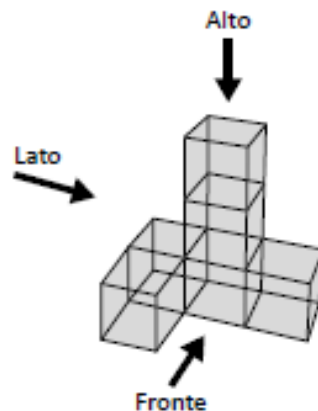
- Risposte corrette 43.3%
- Risposte errate 51.3%
- Risposte Mancate 5.4%

D19. Maria ha unito dei cubetti di uguale dimensione per formare alcuni solidi.

Prima ha costruito il solido disegnato sotto e sulla quadrettatura a fianco ne ha rappresentato la vista di fronte, di lato e dall'alto.



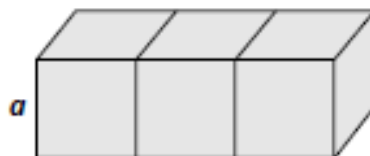
Poi Maria costruisce il solido che vedi qua sotto. Disegna tu nella quadrettatura la vista di fronte, da uno dei due lati e dall'alto del secondo solido costruito da Maria.



Livello 8 2016

Ambiti e argomenti	Domanda	a	b	c	d	Mancate risposte
SPAZIO E FIGURE	D22	21,7	0,0	39,1	39,1	0,0

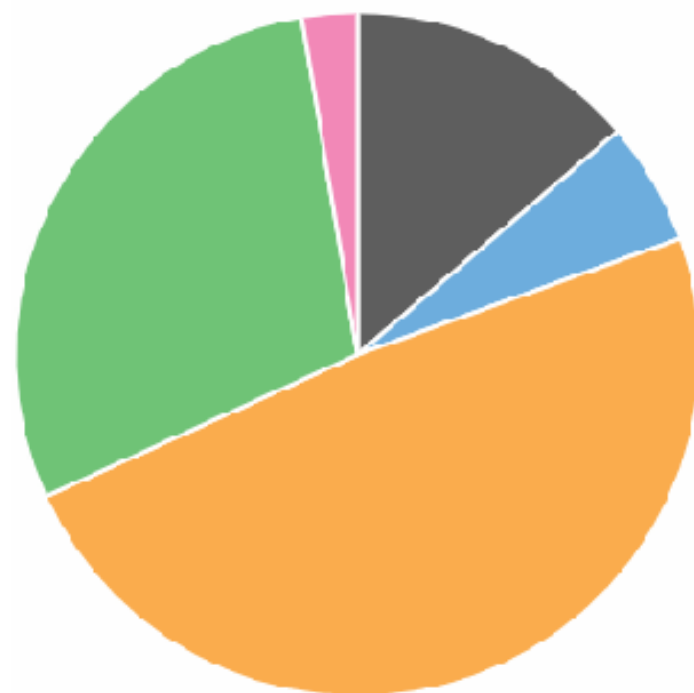
- D22. Per formare il parallelepipedo che vedi in figura si incollano tra loro tre cubi uguali di spigolo a .



Qual è la superficie totale del parallelepipedo così ottenuto?

- A. ☐ $6a^2$
- B. ☐ $7a^2$
- C. ☐ $14a^2$
- D. ☐ $18a^2$

Domande a risposta multipla



Risposta A 13.7%
 Risposta B 5.8%
 Risposta C 48.7%
 Risposta D 29.2%
 Mancate e non valide 2.6%

Giochiamo con i cubetti

Riuscire a ragionare nello spazio

Un po' di origami....

- Pieghiamo un foglio per tre volte...
- ... poi facciamo un foro con una forbice
- Come dicono ad ArtAttack: *Fatto?*
- *Quanti fori ci sono nel mio foglio?*

Vediamo se abbiamo capito!

- Pieghiamo il foglio per tre volte...
- ... poi facciamo un motivo di tre fori
- *Cosa troviamo nel foglio, quando lo apriamo?*

Continuiamo a giocare con la carta

- Pieghiamo il foglio in quattro parti....
- ... tagliamo l'angolo
- *Cosa troviamo se apriamo il foglio?*

Prepariamoci al S.Natale

- Pieghiamo il foglio due volte....
- ... poi altre due volte in diagonale
- ... infine tagliamo l'angolo
- *Quanti lati ha la figura che troviamo?*
- *Che forma avrà?*

Adesso guardiamo la mia

- *Perché è diversa?*

Il foglio impossibile

- *Riuscite a realizzare anche voi la figura che vedete?*

Bibliografia

- G. Bolondi (2004), *La matematica nella scuola di base*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2003). “Competenze”: *obiettivo per chi costruisce il proprio sapere*. *La matematica e la sua didattica*. 3, 327-338.
- Fandiño Pinilla M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica. Valutare e intervenire in modo mirato e specifico*. Trento: Erickson
- Fandiño Pinilla M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.
- Sbaragli S., Mammarella I.C. (2010). *L'apprendimento della geometria*. In: *Lucangeli D., Mammarella I.C. (2010). Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento*. Milano: Franco Angeli.